

Tangenti a una conica: il metodo del “Doppio sdoppiamento”¹

Franco Gioacchino

Sunto

Ecco un metodo alternativo per determinare le tangenti a una conica da un qualsiasi punto del piano.

Esso consiste nell'applicare 2 volte la formula di sdoppiamento che si utilizza per determinare le tangenti in un punto appartenente alla conica in oggetto.

In buona sostanza si utilizza la formula di sdoppiamento una prima volta con lo scopo di determinare, a partire dall'assegnato punto $L(x_L; y_L)$ da cui bisogna tracciare le tangenti t_1 e t_2 alla conica, i due punti di tangenza T_1 e T_2 (che possono essere entrambi coincidenti con L se L appartiene alla conica e $t_1 \equiv t_2$, o non esistere affatto se L è interno alla conica e non esistono né t_1 né t_2).

Per determinare infine, a partire da T_1 e T_2 , le tangenti t_1 e t_2 possiamo o utilizzare di nuovo, stavolta nel modo consueto, la formula di sdoppiamento o semplicemente determinare le rette passanti rispettivamente per i punti L e T_1 e per i punti L e T_2 .

E' possibile implementare con un linguaggio di programmazione o ancor più agevolmente su un foglio elettronico le formule che, a partire dall'input costituito dai coefficienti della conica assegnata e dalle coordinate del punto assegnato L , restituiscono i coefficienti delle equazioni delle rette tangenti cercate e le coordinate dei punti di tangenza.

A proposito di circonferenze, ellissi e iperboli, infine, è interessante osservare che con questo metodo vengono determinate anche le tangenti parallele all'asse y , che utilizzando il tradizionale procedimento del fascio proprio di rette di centro L rimangono escluse; per l'iperbole, in particolare, quando il punto L (diverso dall'origine O) appartiene a un suo asintoto si evita la “falsa tangente” costituita dall'asintoto stesso che invece viene erroneamente rilevata dal metodo tradizionale (chiamarla, come si usa fare, *tangente impropria* è una contraddizione in termini, visto che non *tange* l'iperbole in alcun punto reale, ma nel virtuale *punto all'infinito*).

¹ E' possibile sperimentare il metodo tramite un'applicazione VBA-Excel all'indirizzo <http://www.istitutostaffa.it/document.html>

Per fissare le idee riferiamoci a un esempio concreto: data la parabola $\mathcal{P}: y = -x^2 + 6x - 5$ ed il punto $L(3/2; 2)$ determinare le tangenti a \mathcal{P} passanti per L .

1. Data la parabola $\mathcal{P}: y = ax^2 + bx + c$ e il punto $L(x_L; y_L)$ determinare gli eventuali punti di tangenza $T_1(x_{01}; y_{01})$ e $T_2(x_{02}; y_{02})$ tra \mathcal{P} e le tangenti t_1 e t_2 passanti per L .

La formula di sdoppiamento

$$t: \frac{y + y_0}{2} = axx_0 + b\frac{x + x_0}{2} + c \quad (1.1)$$

fornisce la tangente in un punto $T(x_0; y_0)$, a noi incognito, appartenente a \mathcal{P} .

Se in tale equazione sostituiamo x e y con le coordinate del punto L in nostro possesso imponiamo la condizione che la tangente, come vogliamo, passi per L , e otteniamo un'equazione di 1° grado nelle incognite x_0 e y_0 esprimente y_0 in funzione di x_0 : essa rappresenta la cosiddetta "Polare" della parabola rispetto al punto L , cioè la retta passante per i punti di tangenza con la conica delle tangenti condotte da L (se esse esistono).

$$t: \frac{2 + y_0}{2} = -\frac{3}{2}x_0 + 6\frac{\frac{3}{2} + x_0}{2} - 5 \quad (1.2)$$

da cui l'equazione della polare

$$y_0 = 3x_0 - 3 \quad (1.3)$$

Imponiamo ora la condizione che $T(x_0; y_0)$ appartenga a \mathcal{P} : sostituendo nell'equazione $\mathcal{P}: y = -x^2 + 6x - 5$ x con x_0 e y con y_0 , o meglio con la sua espressione (1.3) contenente x_0 , otteniamo un'equazione di 2° grado nell'incognita x_0 , risolvendo la quale avremo:

- I) 2 valori distinti di x_0 , cioè x_{01} e x_{02} , e i corrispondenti 2 valori distinti di y_0 , cioè y_{01} e y_{02} (L esterno a \mathcal{P} : 2 punti di tangenza distinti $T_1(x_{01}; y_{01})$ e $T_2(x_{02}; y_{02})$ in corrispondenza delle 2 tangenti distinte t_1 e t_2 passanti per L);
- II) 2 valori coincidenti di x_0 e i corrispondenti 2 valori coincidenti di y_0 (L appartenente a \mathcal{P} e coincidente con il solo punto di tangenza $T(x_0; y_0)$ relativo all'unica tangente t passante per $L \equiv T$);
- III) nessun valore di x_0 né dunque di y_0 (L interno a \mathcal{P} : nessun punto di tangenza perché non esiste nessuna tangente passante per L).

Il procedimento ora descritto equivale praticamente a risolvere il sistema tra la conica e la sua polare rispetto a L, determinando così gli eventuali punti di tangenza.

$$\begin{cases} 3x_0 - 3 = -x_0^2 + 6x_0 - 5 \\ y_0 = 3x_0 - 3 \end{cases} \quad (1.4)$$

da cui i 2 punti di tangenza

$$T_1 \begin{cases} x_{01} = 1 \\ y_{01} = 0 \end{cases} \quad \vee \quad T_2 \begin{cases} x_{02} = 2 \\ y_{02} = 3 \end{cases} \quad (1.5)$$

2. Utilizzando nel modo usuale la formula di sdoppiamento determinare le tangenti in T_1 e T_2 a \mathcal{P} .

La formula di sdoppiamento (1.1) applicata a \mathcal{P} , T_1 e T_2 ci fornisce le cercate tangenti alla conica passanti per il punto L.

$$t_1: \frac{y+0}{2} = -x + 6\frac{x+1}{2} - 5 \quad \text{cioè } t_1: y = 4x - 4 \quad (2.1)$$

$$t_2: \frac{y+3}{2} = -2x + 6\frac{x+2}{2} - 5 \quad \text{cioè } t_2: y = 2x - 1 \quad (2.2)$$

Generalizzando quanto esposto nei paragrafi precedenti:

3. Il metodo del “Doppio Sdoppiamento”

Dati $L(x_L; y_L)$ e $\mathcal{P}: y = ax^2 + bx + c$:

I) cerchiamo gli eventuali punti di tangenza $T_1(x_{01}; y_{01})$ e $T_2(x_{02}; y_{02})$.

A tale scopo sostituiamo nella formula di sdoppiamento (1.1) x e y con x_L e y_L

$$t: \frac{y_L + y_0}{2} = ax_L x_0 + b\frac{x_L + x_0}{2} + c \quad (3.1)$$

da cui l'equazione della polare della parabola rispetto a L

$$y_0 = (2ax_L + b)x_0 + (bx_L - y_L + 2c) \quad (3.2)$$

Posti

$$f = 2ax_L + b \quad (3.3)$$

$$g = bx_L - y_L + 2c \quad (3.4)$$

possiamo riscrivere la (3.2) nella forma semplificata

$$y_0 = fx_0 + g \quad (3.5)$$

Quindi risolviamo il sistema di 2° grado

$$\begin{cases} y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c \\ y_0 = fx_0 + g \end{cases} \quad (3.6)$$

che dopo la sostituzione diventa

$$\begin{cases} ax_0^2 + (b-f)x_0 + c - g = 0 \\ y_0 = fx_0 + g \end{cases} \quad (3.7)$$

cioè, ricordando la (3.3)

$$\begin{cases} ax_0^2 - 2ax_Lx_0 + c - g = 0 \\ y_0 = fx_0 + g \end{cases} \quad (3.8)$$

Risolviendo con formula ridotta l'equazione di 2° grado otteniamo

$$\frac{\Delta}{4} = (ax_L)^2 - ac + ag \quad (3.9)$$

e dunque

$$\begin{cases} x_{0i} = x_L \pm \frac{\sqrt{\frac{\Delta}{4}}}{a} \\ y_{0i} = fx_{0i} + g \end{cases} \quad \text{per } i=1,2 \quad (3.10)$$

II) Determiniamo le eventuali tangenti t_1 e t_2 con la formula dello sdoppiamento.

$$t_i : \frac{y + y_{0i}}{2} = axx_{0i} + b \frac{x + x_{0i}}{2} + c \quad \text{per } i = 1, 2 \quad (3.11)$$

da cui

$$t_i : y = (2ax_{0i} + b)x + bx_{0i} - y_{0i} + 2c \quad \text{per } i = 1, 2 \quad (3.12)$$

Posti

$$m_i = 2ax_{0i} + b \quad \text{per } i = 1, 2 \quad (3.13)$$

$$q_i = bx_{0i} - y_{0i} + 2c \quad \text{per } i = 1, 2 \quad (3.14)$$

possiamo riscrivere la (3.12) nella forma semplificata

$$t_i : y = m_i x + q_i \quad \text{per } i = 1, 2 \quad (3.15)$$

4. Implementazione su foglio elettronico

Basterà implementare il procedimento del doppio sdoppiamento utilizzando le formule descritte nel paragrafo precedente. In particolare:

I) preparare 5 celle di input chiamandole a, b, c, xL, yL;

II) nelle celle preventivamente denominate f, g, delta, x01, y01, x02, y02 calcolare le formule, rispettivamente, (3.3), (3.4), (3.9), (3.10). Nella formula relativa al discriminante ridotto prevedere un'istruzione condizionale “=se(....)” che, in caso di valore negativo, mandi in output il messaggio “Il punto L è interno alla parabola: tangenti inesistenti”;

III) preparare 4 celle di output denominate m1, q1, m2, q2 in cui calcolare le formule, rispettivamente, (3.13) e (3.14).

5. Il metodo del “Doppio Sdoppiamento” per l’ellisse in forma canonica riferita ai propri assi di simmetria

Data l’ellisse riferita ai propri assi \mathcal{E} : $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ ed il punto $L(x_L; y_L)$

I) cerchiamo gli eventuali punti di tangenza $T_1(x_{01}; y_{01})$ e $T_2(x_{02}; y_{02})$. Consideriamo, in prima ipotesi, il caso $y_L \neq 0$.

Sostituendo nella formula di sdoppiamento dell’ellisse x e y con x_L e y_L otteniamo

$$t: \frac{x_0 x_L}{\alpha^2} + \frac{y_0 y_L}{\beta^2} = 1 \quad (5.1)$$

da cui l’equazione della polare dell’ellisse rispetto a L

$$y_0 = -\frac{\beta^2 x_L}{\alpha^2 y_L} x_0 + \frac{\beta^2}{y_L} \quad (5.2)$$

Posti

$$f = -\frac{\beta^2 x_L}{\alpha^2 y_L} \quad (5.3)$$

$$g = \frac{\beta^2}{y_L} \quad (5.4)$$

possiamo riscrivere la (5.2) nella forma semplificata

$$y_0 = f x_0 + g \quad (5.5)$$

Quindi risolviamo il sistema di 2° grado

$$\begin{cases} \frac{x_0^2}{\alpha^2} + \frac{y_0^2}{\beta^2} = 1 \\ y_0 = f x_0 + g \end{cases} \quad (5.6)$$

che dopo la sostituzione diventa

$$\begin{cases} (\beta^2 + \alpha^2 f^2)x_0^2 + 2\alpha^2 fgx_0 + \alpha^2 g^2 - \alpha^2 \beta^2 = 0 \\ y_0 = fx_0 + g \end{cases} \quad (5.7)$$

Risolviendo con formula ridotta l'equazione di 2° grado otteniamo

$$\frac{\Delta}{4} = \alpha^2 \beta^2 (\beta^2 + \alpha^2 f^2 - g^2) \quad (5.8)$$

e dunque

$$\begin{cases} x_{0i} = \frac{-\alpha^2 fg \pm \sqrt{\frac{\Delta}{4}}}{\beta^2 + \alpha^2 f^2} & \text{per } i=1,2 \\ y_{0i} = fx_{0i} + g \end{cases} \quad (5.9)$$

Se invece $y_L = 0$ la (5.1) diventa

$$t: \frac{x_0 x_L}{\alpha^2} = 1 \quad (5.10)$$

da cui l'equazione della polare dell'ellisse rispetto a L risulta essere

$$x_0 = \frac{\alpha^2}{x_L} \quad (5.11)$$

Quindi risolviamo il sistema di 2° grado

$$\begin{cases} \frac{x_0^2}{\alpha^2} + \frac{y_0^2}{\beta^2} = 1 \\ x_0 = \frac{\alpha^2}{x_L} \end{cases} \quad (5.12)$$

che dopo la sostituzione diventa

$$\begin{cases} y_0^2 = \beta^2 \left(1 - \frac{\alpha^2}{x_L^2} \right) \\ x_0 = \frac{\alpha^2}{x_L} \end{cases} \quad (5.13)$$

da cui

$$\begin{cases} x_{0i} = \frac{\alpha^2}{x_L} \\ y_{0i} = \pm \sqrt{\beta^2 \left(1 - \frac{\alpha^2}{x_L^2}\right)} \end{cases} \quad \text{per } i = 1, 2 \quad (5.14)$$

Si noti che, essendo $y_L = 0$, la condizione di esistenza della frazione, $x_L \neq 0$, equivale a escludere che L coincida con il centro di simmetria di \mathcal{E} : ciò è certamente lecito visto che non esistono tangenti a un'ellisse che passino per il suo centro di simmetria; analogamente sarà verificata la condizione di esistenza del radicale, $\alpha < x_L$, purché il punto L non sia interno all'ellisse.

II) Determiniamo le eventuali tangenti t_1 e t_2 con la formula dello sdoppiamento.

$$t_i : \frac{x_{0i}x}{\alpha^2} + \frac{y_{0i}y}{\beta^2} = 1 \quad \text{per } i = 1, 2 \quad (5.15)$$

da cui

$$t_i : \beta^2 x_{0i}x + \alpha^2 y_{0i}y - \alpha^2 \beta^2 = 0 \quad \text{per } i = 1, 2 \quad (5.16)$$

Posti

$$a_i = \beta^2 x_{0i} \quad \text{per } i = 1, 2 \quad (5.17)$$

$$b_i = \alpha^2 y_{0i} \quad \text{per } i = 1, 2 \quad (5.18)$$

$$c_i = -\alpha^2 \beta^2 \quad \text{per } i = 1, 2 \quad (5.19)$$

possiamo riscrivere la (5.16) nella forma semplificata

$$t_i : a_i x + b_i y + c_i = 0 \quad \text{per } i = 1, 2 \quad (5.20)$$

6. Il metodo del "Doppio Sdoppiamento" per la circonferenza

Data la circonferenza \mathcal{C} : $x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$ ed il punto $L(x_L; y_L)$

I) cerchiamo gli eventuali punti di tangenza $T_1(x_{01}; y_{01})$ e $T_2(x_{02}; y_{02})$.

Consideriamo, in prima ipotesi, il caso $y_L \neq -\frac{\beta}{2}$.

Sostituendo nella formula di sdoppiamento della circonferenza x e y con x_L e y_L otteniamo

$$t: x_0 x_L + y_0 y_L + \alpha \frac{x_0 + x_L}{2} + \beta \frac{y_0 + y_L}{2} + \gamma = 0 \quad (6.1)$$

da cui l'equazione della polare della circonferenza rispetto a L

$$y_0 = -\frac{2x_L + \alpha}{2y_L + \beta} x_0 - \frac{\alpha x_L + \beta y_L + 2\gamma}{2y_L + \beta} \quad (6.2)$$

Posti

$$f = -\frac{2x_L + \alpha}{2y_L + \beta} \quad (6.3)$$

$$g = -\frac{\alpha x_L + \beta y_L + 2\gamma}{2y_L + \beta} \quad (6.4)$$

possiamo riscrivere la (6.2) nella forma semplificata

$$y_0 = f x_0 + g \quad (6.5)$$

Quindi risolviamo il sistema di 2° grado

$$\begin{cases} x_0^2 + y_0^2 + \alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma = 0 \\ y_0 = f x_0 + g \end{cases} \quad (6.6)$$

che dopo la sostituzione diventa

$$\begin{cases} (1 + f^2)x_0^2 + (2fg + \alpha + \beta f)x_0 + g^2 + \beta g + \gamma = 0 \\ y_0 = f x_0 + g \end{cases} \quad (6.7)$$

Chiamati a , b , c i 3 coefficienti dell'equazione risolvente, cerchiamo le eventuali soluzioni reali del sistema, chiamandole, come al solito

$$\begin{cases} x_{0i} \\ y_{0i} \end{cases} \quad \text{per } i=1,2 \quad (6.8)$$

Se invece $y_L = -\frac{\beta}{2}$ la (6.1) diventa

$$t: 4x_0 x_L + 2\alpha x_0 + 2\alpha x_L - \beta^2 + 4\gamma = 0 \quad (6.9)$$

da cui l'equazione della polare della circonferenza rispetto a L risulta essere

$$x_0 = \frac{\beta^2 - 2\alpha x_L - 4\gamma}{4x_L + 2\alpha} \quad (6.10)$$

Si noti che, essendo $y_L = -\frac{\beta}{2}$, la condizione di esistenza $x_L \neq -\frac{\alpha}{2}$ equivale a escludere che L coincida con il centro di \mathcal{C} : ciò è certamente lecito visto che non esistono tangenti a una circonferenza che passino per il suo centro.

Infine risolviamo il sistema di 2° grado

$$\begin{cases} x_0 = \frac{\beta^2 - 2\alpha x_L - 4\gamma}{4x_L + 2\alpha} \\ y_0^2 + \beta y_0 + x_0^2 + \alpha x_0 + \gamma = 0 \end{cases} \quad (6.11)$$

Chiamati $a = 1$, $b = \beta$, $c = x_0^2 + \alpha x_0 + \gamma$ i 3 coefficienti dell'equazione risolvente con incognita y_0 , cerchiamo le eventuali soluzioni reali del sistema, chiamandole, come al solito

$$\begin{cases} x_{0i} \\ y_{0i} \end{cases} \quad \text{per } i=1,2 \quad (6.12)$$

II) Determiniamo le eventuali tangenti t_1 e t_2 con la formula dello sdoppiamento.

$$t_i : x_{0i}x + y_{0i}y + \alpha \frac{x_{0i} + x}{2} + \beta \frac{y_{0i} + y}{2} + \gamma = 0 \quad \text{per } i = 1, 2 \quad (6.13)$$

da cui

$$t_i : (2x_{0i} + \alpha)x + (2y_{0i} + \beta)y + \alpha x_{0i} + \beta y_{0i} + 2\gamma = 0 \quad \text{per } i = 1, 2 \quad (6.14)$$

Posti

$$a_i = 2x_{0i} + \alpha \quad \text{per } i = 1, 2 \quad (6.15)$$

$$b_i = 2y_{0i} + \beta \quad \text{per } i = 1, 2 \quad (6.16)$$

$$c_i = \alpha x_{0i} + \beta y_{0i} + 2\gamma \quad \text{per } i = 1, 2 \quad (6.17)$$

possiamo riscrivere la (6.14) nella forma semplificata

$$t_i : a_i x + b_i y + c_i = 0 \quad \text{per } i = 1, 2 \quad (6.18)$$

7. Il metodo del "Doppio Sdoppiamento" per l'iperbole in forma canonica riferita ai propri assi di simmetria

Risolviamo il caso delle tangenti condotte dal punto $L(x_L; y_L)$ all'iperbole in forma canonica riferita ai propri assi $\mathcal{J}: \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$; in modo analogo si

tratterà il caso di iperbole con asse trasverso verticale.

I) cerchiamo gli eventuali punti di tangenza $T_1(x_{01}; y_{01})$ e $T_2(x_{02}; y_{02})$.

Consideriamo, in prima ipotesi, il caso $y_L \neq 0$.

Sostituendo nella formula di sdoppiamento dell'ellisse x e y con x_L e y_L otteniamo

$$t: \frac{x_0 x_L}{\alpha^2} - \frac{y_0 y_L}{\beta^2} = 1 \quad (7.1)$$

da cui l'equazione della polare dell'iperbole rispetto a L

$$y_0 = \frac{\beta^2 x_L}{\alpha^2 y_L} x_0 - \frac{\beta^2}{y_L} \quad (7.2)$$

Posti

$$f = \frac{\beta^2 x_L}{\alpha^2 y_L} \quad (7.3)$$

$$g = -\frac{\beta^2}{y_L} \quad (7.4)$$

possiamo riscrivere la (5.2) nella forma semplificata

$$y_0 = f x_0 + g \quad (7.5)$$

Quindi risolviamo il sistema di 2° grado

$$\begin{cases} \frac{x_0^2}{\alpha^2} - \frac{y_0^2}{\beta^2} = 1 \\ y_0 = f x_0 + g \end{cases} \quad (7.6)$$

che dopo la sostituzione diventa

$$\begin{cases} (\beta^2 - \alpha^2 f^2) x_0^2 - 2\alpha^2 f g x_0 - \alpha^2 g^2 - \alpha^2 \beta^2 = 0 \\ y_0 = f x_0 + g \end{cases} \quad (7.7)$$

Se il punto L appartiene a un asintoto dell'iperbole e solo in tal caso, la prima equazione ha coefficiente direttore 0 ed il sistema è di 1° grado, con soluzione

$$\begin{cases} x_{01} = -\frac{g^2 + \beta^2}{2fg} \\ y_{01} = fx_{01} + g \end{cases}$$

Ciò è coerente con l'esistenza, in tal caso, di una sola tangente all'iperbole.

Se L non appartiene a nessuno dei due asintoti, invece, risolvendo con formula ridotta l'equazione di 2° grado otteniamo

$$\frac{\Delta}{4} = \alpha^2 \beta^2 (\beta^2 - \alpha^2 f^2 + g^2) \quad (7.8)$$

e, se tale numero è maggiore uguale di 0, le soluzioni

$$\begin{cases} x_{0i} = \frac{\alpha^2 fg \pm \sqrt{\frac{\Delta}{4}}}{\beta^2 - \alpha^2 f^2} \quad \text{per } i=1,2 \\ y_{0i} = fx_{0i} + g \end{cases} \quad (7.9)$$

Se invece $y_L = 0$ la (7.1) diventa

$$t: \frac{x_0 x_L}{\alpha^2} = 1 \quad (7.10)$$

da cui l'equazione della polare della circonferenza rispetto a L risulta essere

$$x_0 = \frac{\alpha^2}{x_L} \quad (7.11)$$

Quindi risolviamo il sistema di 2° grado

$$\begin{cases} \frac{x_0^2}{\alpha^2} - \frac{y_0^2}{\beta^2} = 1 \\ x_0 = \frac{\alpha^2}{x_L} \end{cases} \quad (7.12)$$

che dopo la sostituzione diventa

$$\begin{cases} y_0^2 = \beta^2 \left(\frac{\alpha^2}{x_L^2} - 1 \right) \\ x_0 = \frac{\alpha^2}{x_L} \end{cases} \quad (7.13)$$

da cui

$$\begin{cases} x_{0i} = \frac{\alpha^2}{x_L} \\ y_{0i} = \pm \sqrt{\beta^2 \left(\frac{\alpha^2}{x_L^2} - 1 \right)} \end{cases} \quad \text{per } i = 1, 2 \quad (7.14)$$

Si noti che, essendo $y_L = 0$, la condizione di esistenza della frazione, $x_L \neq 0$, equivale a escludere che L coincida con il centro di simmetria di \mathcal{J} ossia con l'origine O (caso già discusso); analogamente sarà verificata la condizione di esistenza del radicale, $\alpha > x_L$, purché il punto L non sia interno ai rami dell'iperbole.

II) Determiniamo le eventuali tangenti t_1 e t_2 con la formula dello sdoppiamento.

$$t_i : \frac{x_{0i}x}{\alpha^2} - \frac{y_{0i}y}{\beta^2} = 1 \quad \text{per } i = 1, 2 \quad (7.15)$$

da cui

$$t_i : \beta^2 x_{0i}x - \alpha^2 y_{0i}y - \alpha^2 \beta^2 = 0 \quad \text{per } i = 1, 2 \quad (7.16)$$

Posti

$$a_i = \beta^2 x_{0i} \quad \text{per } i = 1, 2 \quad (7.17)$$

$$b_i = -\alpha^2 y_{0i} \quad \text{per } i = 1, 2 \quad (7.18)$$

$$c_i = -\alpha^2 \beta^2 \quad \text{per } i = 1, 2 \quad (7.19)$$

possiamo riscrivere la (5.16) nella forma semplificata

$$t_i : a_i x + b_i y + c_i = 0 \quad \text{per } i = 1, 2 \quad (7.20)$$

8. Il metodo del “Doppio Sdoppiamento” per una generica conica

Risolviamo il caso delle tangenti condotte dal punto $L(x_L; y_L)$ alla conica

$$\mathcal{C}: \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 + 2\delta x + 2\epsilon y + \zeta = 0$$

I) Cerchiamo gli eventuali punti di tangenza $T_1(x_{01}; y_{01})$ e $T_2(x_{02}; y_{02})$.

Sostituendo nella formula di sdoppiamento della conica x e y con x_L e y_L otteniamo

$$t: \alpha x_L x_0 + 2\beta \frac{x_L y_0 + y_L x_0}{2} + \gamma y_L y_0 + 2\delta \frac{x_0 + x_L}{2} + 2\varepsilon \frac{y_0 + y_L}{2} + \zeta = 0 \quad (8.1)$$

da cui l'equazione implicita della polare della conica rispetto a L

$$(\alpha x_L + \beta y_L + \delta)x_0 + (\beta x_L + \gamma y_L + \varepsilon)y_0 + \delta x_L + \varepsilon y_L + \zeta = 0. \quad (8.2)$$

Chiamati ap , bp e cp i tre coefficienti di tale retta,

se $bp \neq 0$

ne rendiamo esplicita l'equazione e, posti

$$f = -ap/bp \quad (8.3)$$

$$g = -cp/bp \quad (8.4)$$

otteniamo

$$y_0 = fx_0 + g \quad (8.5)$$

Quindi risolviamo il sistema di 2° grado

$$\begin{cases} \alpha x_0^2 + 2\beta x_0 y_0 + \gamma y_0^2 + 2\delta x_0 + 2\varepsilon y_0 + \zeta = 0 \\ y_0 = fx_0 + g \end{cases} \quad (8.6)$$

che dopo la sostituzione diventa

$$\begin{cases} (\alpha + 2\beta f + \gamma f^2)x_0^2 + 2(\beta g + \gamma fg + \delta + \varepsilon f)x_0 + \gamma g^2 + 2\varepsilon g + \zeta = 0 \\ y_0 = fx_0 + g \end{cases} \quad (8.7)$$

Se la prima equazione ha coefficiente direttore 0 ed il sistema è di 1° grado, cioè se la conica è un'iperbole e il punto L appartiene a un suo asintoto (escluso il caso in cui anche il secondo coefficiente sia nullo, per il quale non esistono tangenti alla curva) si ottiene l'unica soluzione

$$\begin{cases} x_{01} = -\frac{\gamma g^2 + 2\varepsilon g + \zeta}{2(\beta g + \gamma fg + \delta + \varepsilon f)} \\ y_{01} = fx_{01} + g \end{cases} \quad (8.8)$$

esiste cioè una sola tangente all'iperbole.

In tutti gli altri casi, invece, dopo aver denominato as , $2bs$ e cs i tre coefficienti dell'equazione di 2° grado del sistema (8.7), risolvendo con formula ridotta otteniamo

$$\frac{\Delta}{4} = bs^2 - as * cs \quad (8.9)$$

e, se $\frac{\Delta}{4} \geq 0$, le soluzioni

$$\begin{cases} x_{0i} = \frac{-bs \pm \sqrt{\frac{\Delta}{4}}}{as} \\ y_{0i} = fx_{0i} + g \end{cases} \quad \text{per } i=1,2 \quad (8.10)$$

Se invece $bp = 0$ (escluso il caso in cui anche $ap = 0$, nel quale di nuovo non esistono tangenti), ossia se la polare è parallela all'asse y , si ricava immediatamente

$$x_{01} = x_{02} = -\frac{cp}{ap} \quad (8.11)$$

e dunque risolviamo il sistema di 2° grado

$$\begin{cases} \alpha x_0^2 + 2\beta x_0 y_0 + \gamma y_0^2 + 2\delta x_0 + 2\epsilon y_0 + \zeta = 0 \\ x_0 = -\frac{cp}{ap} \end{cases} \quad (8.12)$$

ottenendo, dopo la sostituzione,

$$\begin{cases} \gamma y_0^2 + 2\left(\epsilon - \beta \frac{cp}{ap}\right) y_0 + \alpha \frac{cp^2}{ap^2} - 2\delta \frac{cp}{ap} + \zeta = 0 \\ x_0 = -\frac{cp}{ap} \end{cases} \quad (8.13)$$

Se $\gamma = 0$ ed il sistema è di 1° grado, cioè se la conica è un'iperbole e il punto L appartiene a un suo asintoto (escludendo di nuovo il caso in cui anche il secondo coefficiente sia nullo, per il quale non esistono tangenti alla curva), come nel precedente caso (8.8), si ottiene l'unica soluzione

$$\begin{cases} x_{01} = -\frac{cp}{ap} \\ y_{01} = \frac{\alpha \frac{cp^2}{ap^2} - 2\delta \frac{cp}{ap} + \zeta}{2\left(\beta \frac{cp}{ap} - \epsilon\right)} \end{cases} \quad (8.14)$$

In tutti gli altri casi, invece, dopo aver denominato at , $2bt$ e ct i tre coefficienti dell'equazione di 2° grado del sistema (8.13), risolvendo con formula ridotta otteniamo

$$\frac{\Delta}{4} = bt^2 - at * ct \quad (8.15)$$

e, se $\frac{\Delta}{4} \geq 0$, le soluzioni.

$$\begin{cases} x_{0i} = -\frac{cp}{ap} \\ y_{0i} = \frac{-bt \pm \sqrt{\frac{\Delta}{4}}}{at} \end{cases} \quad \text{per } i=1,2 \quad (8.16)$$

II) Determiniamo le eventuali tangenti t_1 e t_2 con la formula dello sdoppiamento.

$$t_i : \alpha x_{0i} x + 2\beta \frac{y_0 x + x_0 y}{2} + \gamma y_0 y + 2\delta \frac{x + x_0}{2} + 2\varepsilon \frac{y + y_0}{2} + \zeta = 0 \quad \text{per } i = 1, 2 \quad (8.17)$$

da cui

$$t_i : (\alpha x_{0i} + \beta y_{0i} + \delta)x + (\gamma y_{0i} + \beta x_{0i} + \varepsilon)y + \delta x_{0i} + \varepsilon y_{0i} + \zeta = 0 \quad \text{per } i = 1, 2 \quad (8.18)$$

Posti

$$a_i = \alpha x_{0i} + \beta y_{0i} + \delta \quad \text{per } i = 1, 2 \quad (8.19)$$

$$b_i = \gamma y_{0i} + \beta x_{0i} + \varepsilon \quad \text{per } i = 1, 2 \quad (8.20)$$

$$c_i = \delta x_{0i} + \varepsilon y_{0i} + 2\zeta \quad \text{per } i = 1, 2 \quad (8.21)$$

possiamo riscrivere la (8.18) nella forma semplificata

$$t_i : a_i x + b_i y + c_i = 0 \quad \text{per } i = 1, 2 \quad (8.22)$$